

**CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI**

A.A. 2024-2025

Prova scritta in aula del 28.01.2025

Parte II - Testo 1

*Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.*

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

**Esercizio n. 1 (17 punti)**

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità  $C$ ,  $M_C$ .

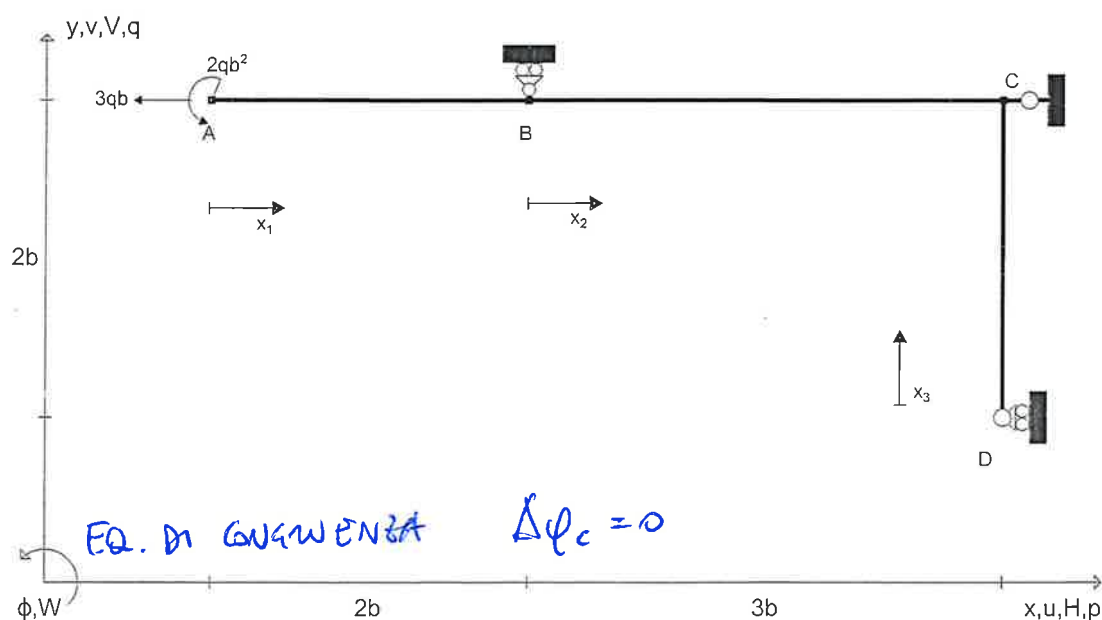
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto  $A$ ,  $\varphi_A$ .

*Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.*

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 2 28.01.25\*001



## Esercizio n. 2 (7 punti)

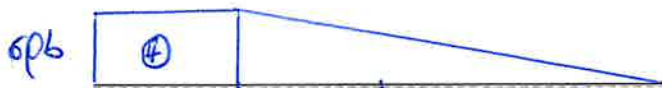
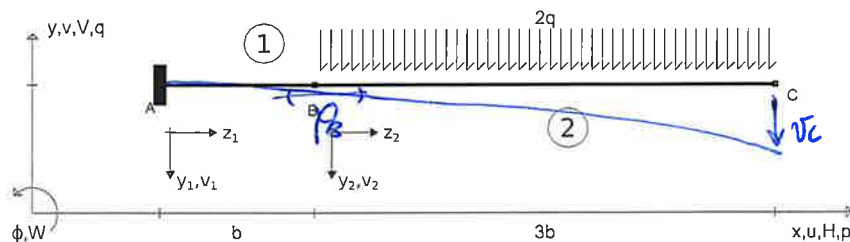
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

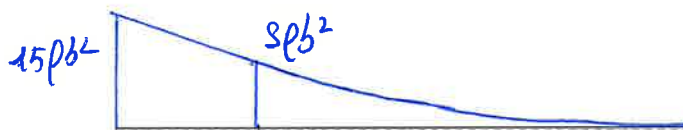
1. La deformata della linea d'asse,  $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$ ;
2. La sua derivata prima,  $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$ ;
3. La rotazione del punto  $B$ ,  $\varphi_B$ ;
4. Lo spostamento verticale del punto  $C$ ,  $v_C$ .

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA\_2 28.01.25\*001



↑ (+) ↓



⌋ (+) ⌋

$$H_A (\Rightarrow) = 0; V_A (\uparrow) = 6pb; M_A (\curvearrowright) = 15pb^2;$$

$$N_{AB} = 0; T_{AB} = 6pb; M_{AB} = -15pb^2 + 6pbz_1;$$

$$N_{BC} = 0; T_{BC} = 6pb - 2qz_2; M_{BC} = -8pb^2 + 6pbz_2 - qz_2^2;$$

$$\text{c.c in } A = v_1(z_1=0)=0; v_1'(z_1=0)=0; \text{c.c in } B = v_1(z_1=b)=v_2(z_2=0); v_1'(z_1=b)=v_2'(z_2=0);$$

$$\text{c.c in } C = 0;$$

$$v_1(z_1) = \frac{1}{6} (15pb^2z_1^2 - qb^3z_1^3); v_1'(z_1) = \frac{1}{2} (15pb^2z_1 - 3qb^3z_1^2);$$

$$v_2(z_2) = \frac{1}{6} (8pb^2z_2^2 - 6pbz_2^3 + 12pb^2z_2^4 + 12pb^3z_2^5 + 12pb^4z_2^6); v_2'(z_2) = \frac{1}{2} (8pb^2z_2 - 6pbz_2^2 + 12pb^2z_2^3 + 12pb^3z_2^4);$$

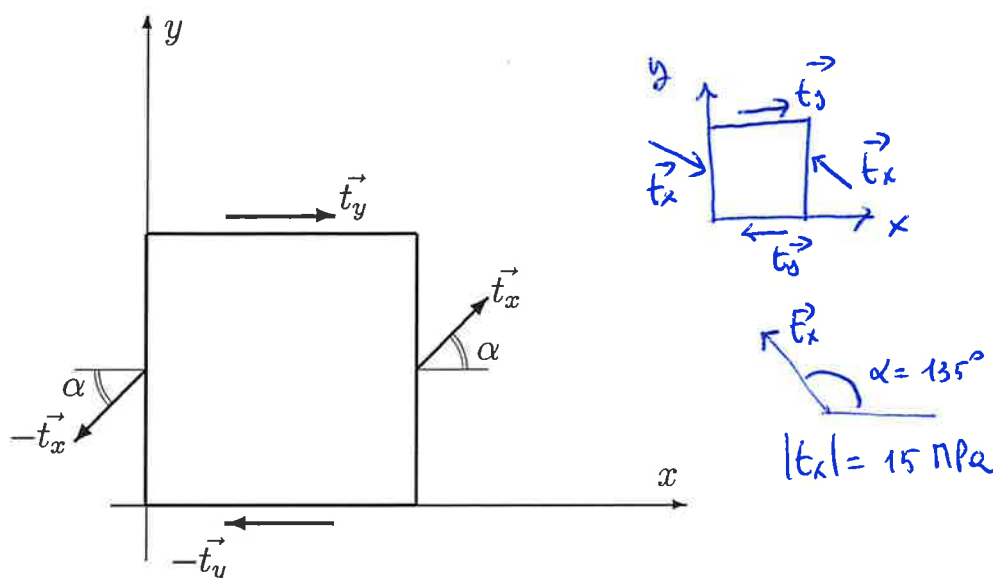
$$v_C = \frac{251pb^4}{48EI} (\downarrow); \varphi_B = \frac{12pb^3}{EI} (\curvearrowright);$$

### Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi  $x$  e  $y$  ai vettori sforzo (piani)  $\vec{t}_x$  e  $\vec{t}_y$  rispettivamente; di questi  $\vec{t}_x$  è inclinato rispetto all'asse  $x$  di un angolo  $\alpha = 135^\circ$  (sicché:  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ) e ha modulo di valore  $|\vec{t}_x| = 15$  MPa. L'altro vettore sforzo,  $\vec{t}_y$ , è invece *orizzontale* (ma di verso non specificato!), come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e la massima tensione tangenziale,  $\tau_{\max}$ .

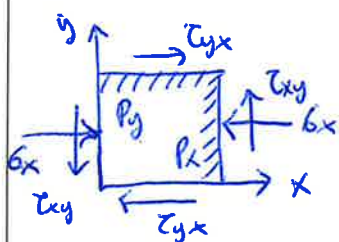
Determinare inoltre quanto vale l'angolo  $\varphi$  formato dall'asse  $x$  e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo,  $\sigma_1$ .



$\sigma_x = -10,606$  (MPa);  $\sigma_y = 0,000$  (MPa);  $\tau_{xy} = 10,606$  (MPa);

$\sigma_1 = 6,1555$  (MPa);  $\sigma_2 = -17,162$  (MPa);  $\tau_{\max} = 11,358$  (MPa);

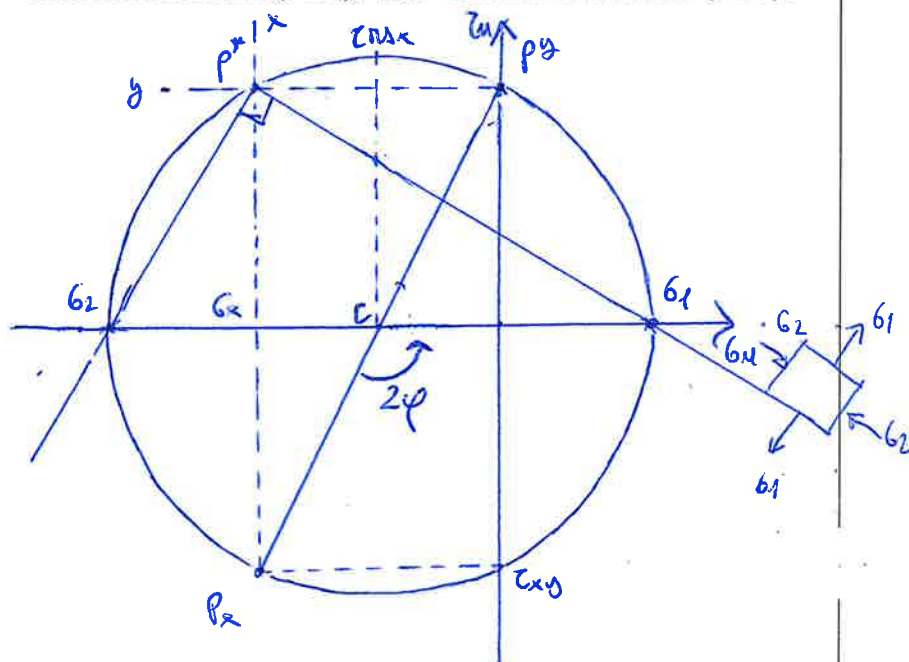
cerchio di Mohr:

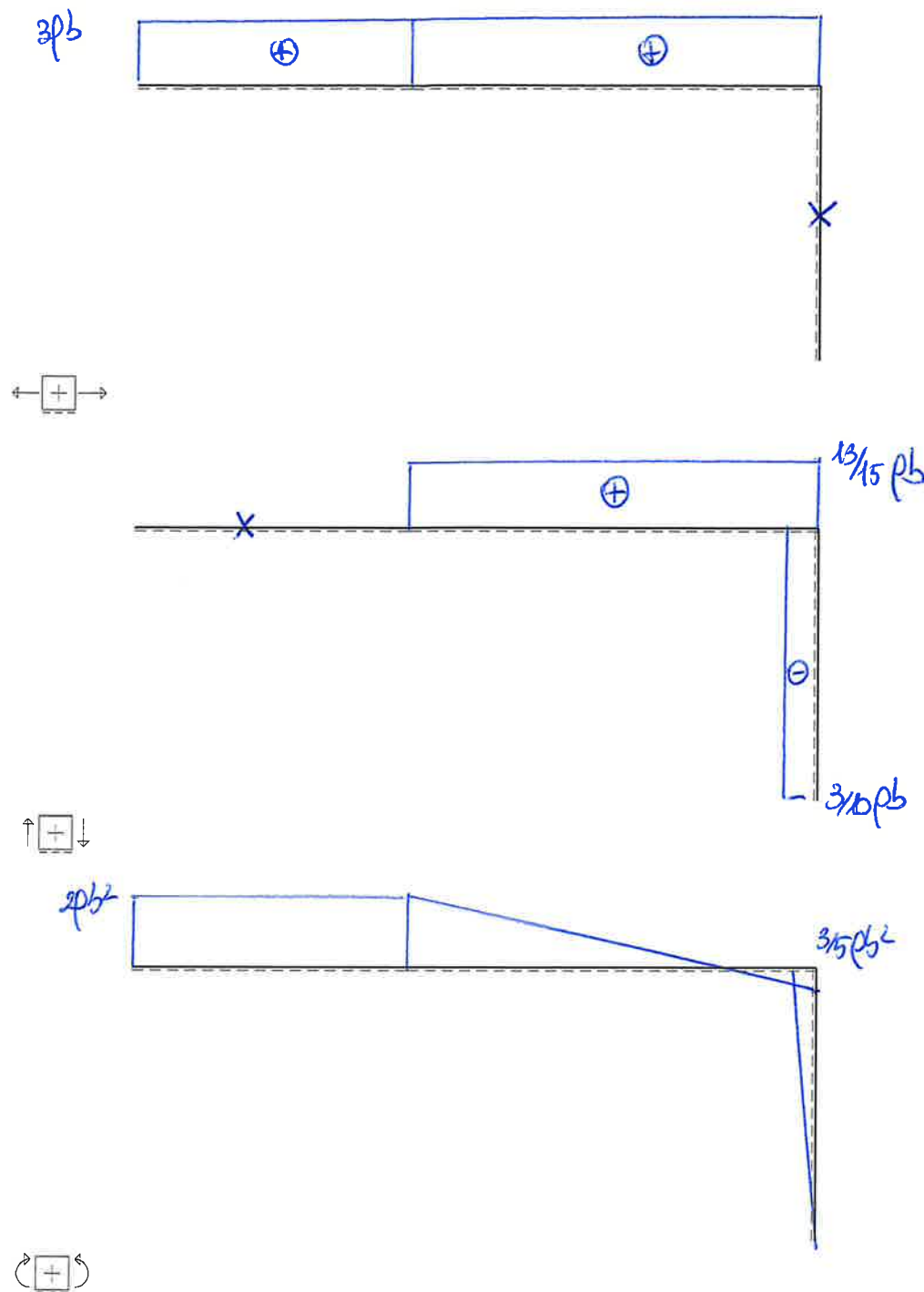


$P_x = (-10,606; -10,606)$

$P_y = (0,000; +10,606)$

$\varphi = 58,28$  ( $^\circ$ );





$V_B(\hat{v}) = \frac{13}{15} pb$	$H_C(\hat{v}) = \frac{17}{10} pb$	$V_C(\hat{v}) = -\frac{13}{15} pb$	$H_D(\hat{v}) = \frac{3}{10} pb$	$M_C(\hat{v}) = \frac{3}{5} pb^2$
$N_{AB} = 3pb$	$T_{AB} = //$	$M_{AB} = -2pb^2$		
$N_{BC} = 3pb$	$T_{BC} = \frac{13}{15} pb$	$M_{BC} = -2pb^2 + \frac{13}{15} pb x_2$		
$N_{DC} = //$	$T_{DC} = -\frac{3}{10} pb$	$M_{DC} = \frac{3}{10} pb x_3$		
$\varphi_A = \frac{57 pb^3}{10 ED}$	$(\angle)$			

**CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI**

A.A. 2024-2025

Prova scritta in aula del 28.01.2025

Parte II - Testo 2

*Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.*

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

**Esercizio n. 1 (17 punti)**

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità  $C$ ,  $M_C$ .

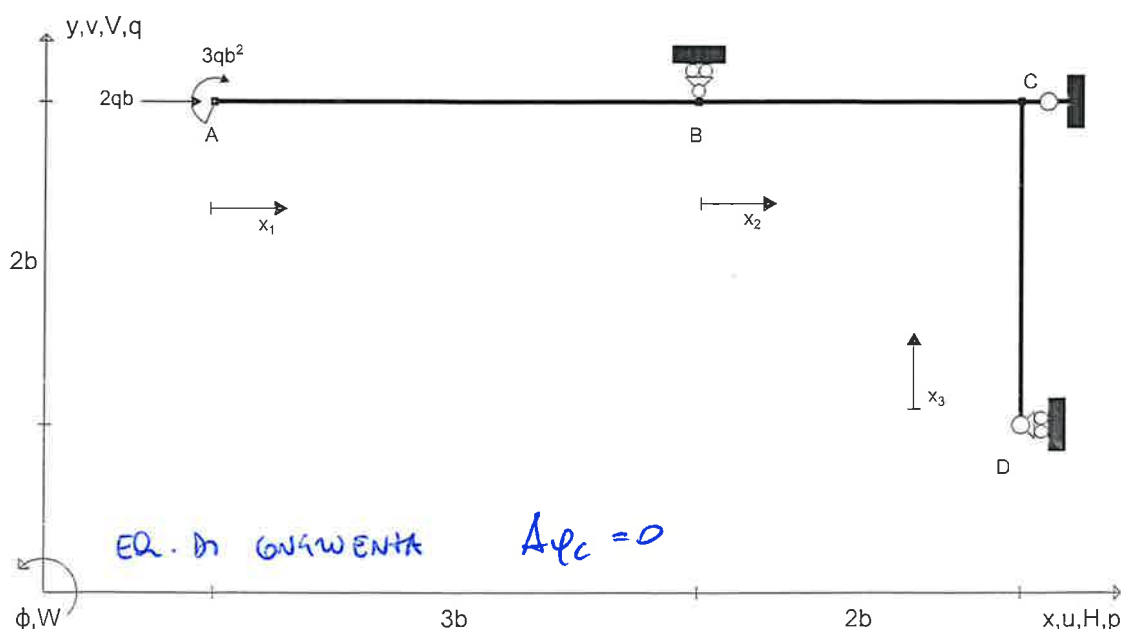
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto  $A$ ,  $\phi_A$ .

*Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.*

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 2 28.01.25\*002



## Esercizio n. 2 (7 punti)

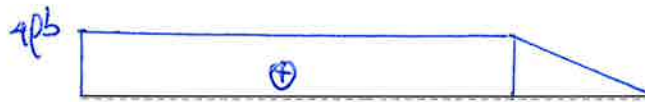
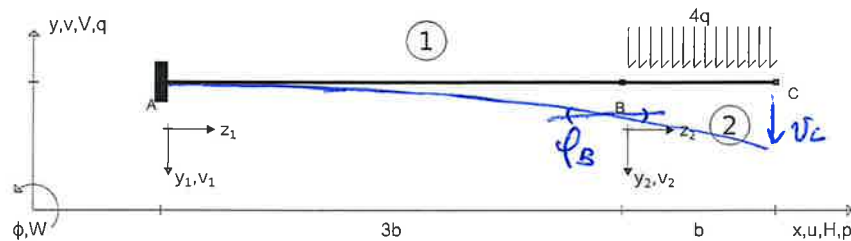
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

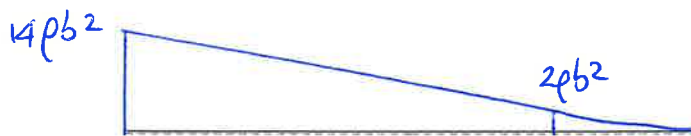
1. La deformata della linea d'asse,  $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$ ;
2. La sua derivata prima,  $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$ ;
3. La rotazione del punto  $B$ ,  $\varphi_B$ ;
4. Lo spostamento verticale del punto  $C$ ,  $v_C$ .

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA\_2 28.01.25\*002



$\uparrow (+) \downarrow$



$(+)$

$$H_A (\Rightarrow) = 0; V_A (\uparrow) = 4pb; M_A (\curvearrowright) = -14pb^2;$$

$$N_{AB} = //; T_{AB} = 4pb; M_{AB} = -14pb^2 + 4pbz_1;$$

$$N_{BC} = //; T_{BC} = 4pb - 4pz_2; M_{BC} = -2pb^2 + 4pbz_2 - 2pz_2^2;$$

$$\text{c.c in } A = v_1(z_1=0)=0; v_1'(z_1=0)=0; \text{ c.c in } B = v_1(z_1=3b)=v_2(z_2=0); v_1'(z_1=3b)=v_2'(z_2=0);$$

$$\text{c.c in } C = //$$

$$v_1(z_1) = \frac{1}{6}(7pb^2z_1^2 - \frac{2}{3}pbz_1^3); v_1'(z_1) = \frac{1}{3}(14pbz_1 - 2pbz_1^2);$$

$$v_2(z_2) = \frac{1}{6}(pb^2z_2^2 - \frac{2}{3}pbz_2^3 + \frac{1}{6}pbz_2^4 + 4pb^2z_2 + 45pb^3); v_2'(z_2) = \frac{1}{3}(2pb^2z_2 - 2pbz_2^2 + \frac{2}{3}pbz_2^3 + 4pb^2);$$

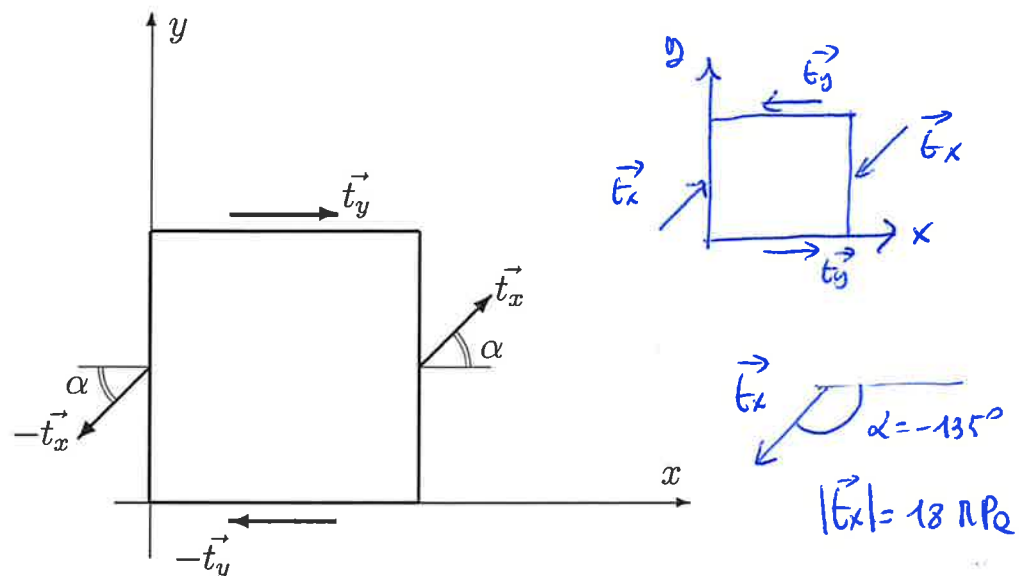
$$v_C = \frac{138pb^4}{2ED} (\downarrow); \varphi_B = \frac{24pb^3}{ED} (\curvearrowright);$$

### Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi  $x$  e  $y$  ai vettori sforzo (piani)  $\vec{t}_x$  e  $\vec{t}_y$  rispettivamente; di questi  $\vec{t}_x$  è inclinato rispetto all'asse  $x$  di un angolo  $\alpha = -135^\circ$  (sicché:  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ) e ha modulo di valore  $|\vec{t}_x| = 18 \text{ MPa}$ . L'altro vettore sforzo,  $\vec{t}_y$ , è invece *orizzontale* (ma di verso non specificato!), come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e la massima tensione tangenziale,  $\tau_{\max}$ .

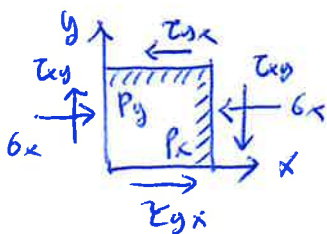
Determinare inoltre quanto vale l'angolo  $\varphi$  formato dall'asse  $x$  e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo,  $\sigma_1$ .



$\sigma_x = -12,727$  (MPa);  $\sigma_y = 0,000$  (MPa);  $\tau_{xy} = -12,727$  (MPa);

$\sigma_1 = 7,1866$  (MPa);  $\sigma_2 = -20,524$  (MPa);  $\tau_{\max} = 14,1230$  (MPa);

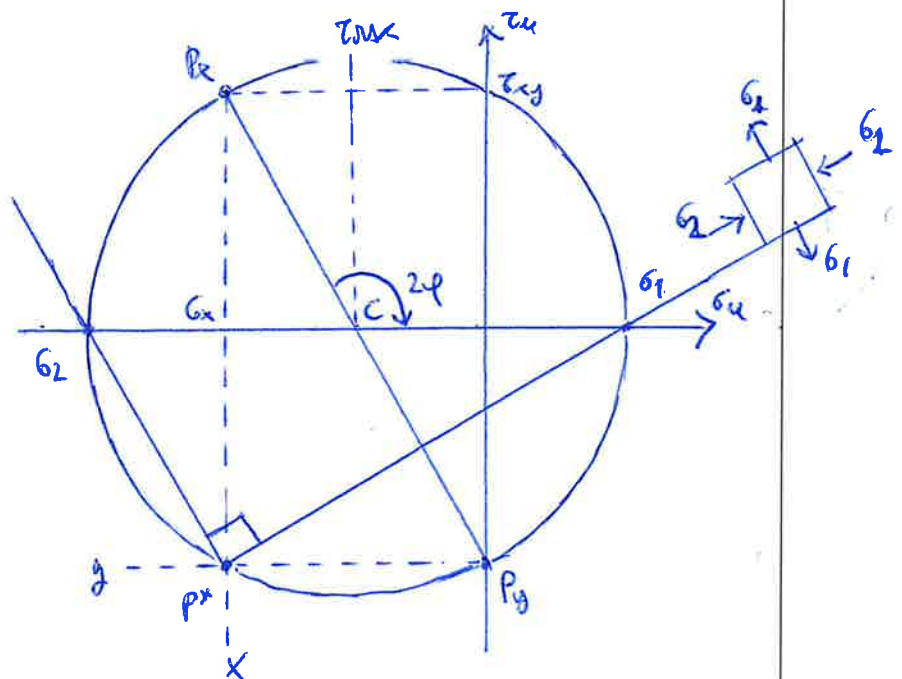
cerchio di Mohr:

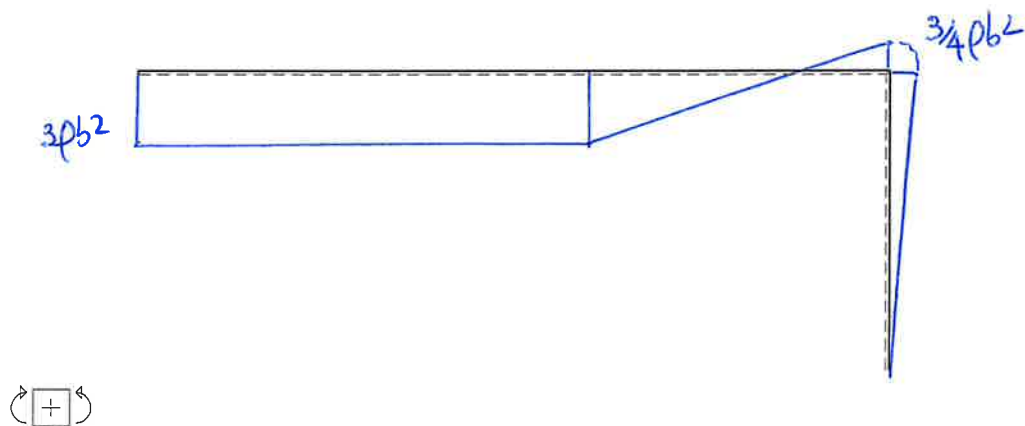
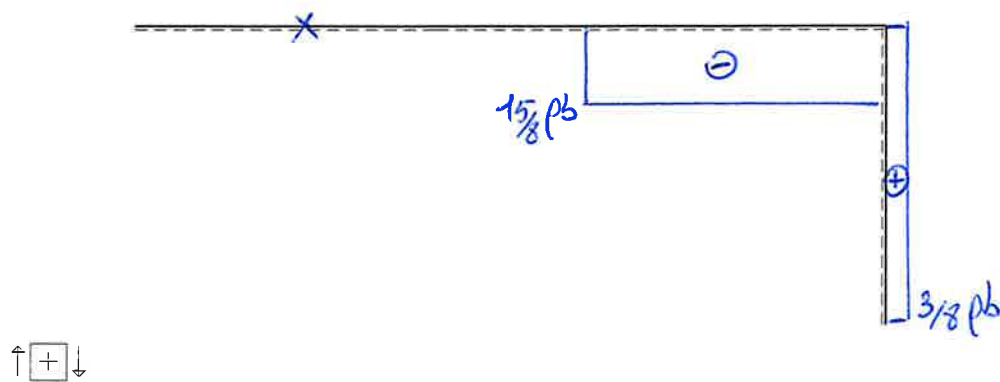
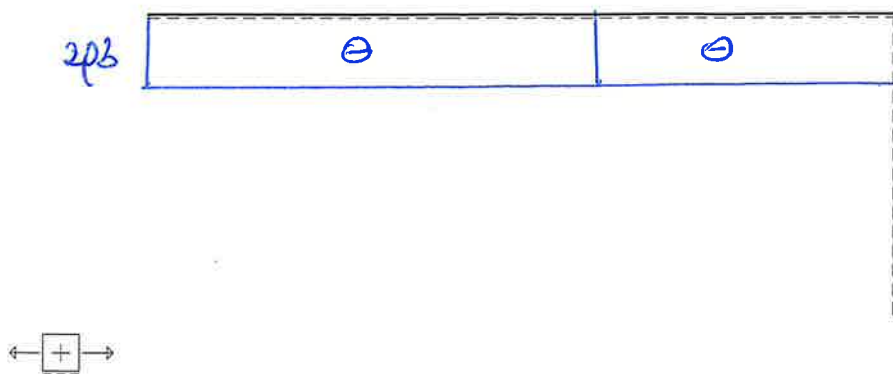


$P_x = (-12,727; +12,727)$

$P_y = (0,000; -12,727)$

$\varphi = -58,28$  ( $^\circ$ );





$V_B(\hat{u}) = -\frac{15}{8}pb$	$H_C(\hat{v}) = -\frac{15}{8}pb$	$V_C(\hat{u}) = \frac{15}{8}pb$	$H_D(\hat{v}) = -\frac{3}{8}pb$	$M_C(\hat{z}) = -\frac{3}{4}pb^2$
$N_{AB} = -2pb$	$T_{AB} = //$	$M_{AB} = 3pb^2$		
$N_{BC} = -2pb$	$T_{BC} = -\frac{15}{8}pb$	$M_{BC} = 3pb^2 - \frac{15}{8}pb \times 2$		
$N_{DC} = //$	$T_{DC} = \frac{3}{8}pb$	$M_{DC} = -\frac{3}{8}pb \times 3$		
$\varphi_A = -\frac{43pb^3}{4EI}$	$(\tau)$			